

# 公共课知识家【数学】

## 【专题一】一元函数积分学

### § 3.1 不定积分

#### 一. 基本概念与性质

1. 原函数与不定积分的概念
2. 不定积分的性质 (4 条)
3. 原函数的存在性

需要注意的是：设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续，则  $f(x)$  在区间  $I$  上原函数一定存在，但初等函数的原函数不一定是初等函数。例如  $\int \sin(x^2)dx$ ,  $\int \cos(x^2)dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{\cos x}{x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$ ,  $\int e^{-x^2} dx$  等。被积函数有原函数，但不能用初等函数表示，故这些不定积分均称为积不出来。对于所列的这几个积不出来的函数尤其要引起大家的注意，特别会出现在二元函数积分中：先  $x$  后  $y$  积不出来，交换积分顺序就可以了。这也考研题目常用的：‘伎俩’。

#### 二. 基本积分公式

#### 三. 换元积分法和分部积分法

1. 第一换元积分法 (凑微分法)

设  $\int f(u)du = F(u) + C$ , 又  $\varphi(x)$  可导, 则

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \stackrel{\text{令 } u = \varphi(x)}{=} \int f(u)du \\ &= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C \end{aligned}$$

这里要求读者对常用的微分公式要“倒背如流”，也就是非常熟练地凑出微分。

常用的几种凑微分形式：

$$(1) \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$(2) \int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n+b)d(ax^n+b) \quad (a \neq 0, n \neq 0)$$

$$(3) \int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(\ln x)d(\ln x)$$

$$(4) \int f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = -\int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(5) \int f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$$

$$(6) \int f(a^x) a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d(a^x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)$$

$$(7) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$$

$$(8) \int f(\cos x) \sin x dx = -\int f(\cos x) d(\cos x)$$

$$(9) \int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$$

$$(10) \int f(\cot x) \csc^2 x dx = -\int f(\cot x) d(\cot x)$$

$$(11) \int f(\sec x) \sec x \tan x dx = \int f(\sec x) d(\sec x)$$

$$(12) \int f(\csc x) \csc x \cot x dx = -\int f(\csc x) d(\csc x)$$

$$(13) \int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$$

$$(14) \int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int f(\arccos x) d(\arccos x)$$

$$(15) \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$$

$$(16) \int \frac{f(\operatorname{arc} \cot x)}{1+x^2} dx = -\int f(\operatorname{arc} \cot x) d(\operatorname{arc} \cot x)$$

$$(17) \int \frac{f\left(\arctan \frac{1}{x}\right)}{1+x^2} dx = -\int f\left(\arctan \frac{1}{x}\right) d\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$$

$$(18) \int \frac{f \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right]}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int f \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right] d \left( \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right)$$

$(a > 0)$

$$(19) \int \frac{f \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int f \left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right] d \left( \ln \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right)$$

$(a > 0)$

$$(20) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0)$$

## 2. 第二换元积分法

设  $x = \varphi(t)$  可导, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 若  $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t) + C$ ,

$$\text{则 } \int f(x)dx \stackrel{\text{令 } x = \varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(t) + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C$$

其中  $t = \varphi^{-1}(x)$  为  $x = \varphi(t)$  的反函数。

第二换元积分法绝大多数用于根式的被积函数, 通过换元把根式去掉, 其常见的变量替换分为两大类:

第一类: 被积函数是根式, 例如  $\sqrt{ae^x + b}$  等。

第二类: 被积函数含有  $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$  ( $A \neq 0$ ), 如果仍令  $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = t$  解出  $x = \varphi(t)$  仍是根号, 那么这样变量替换不行, 要作特殊处理, 将  $A > 0$  时先化为  $\sqrt{A[(x - x_0)^2 \pm l^2]}$ ,  $A < 0$  时, 先化为  $\sqrt{(-A)[l^2 - (x - x_0)^2]}$  然后再作下列三种三角替换之一:

根式的形式	所作替换
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$

值得注意: 如果既能用上述第二换元积分法, 又可以用第一换元积分法, 那么一般用第一换

元积分法比较简单。

$$\text{例 1. } \int x\sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 - a^2} d(x^2 - a^2)$$

$$\stackrel{\text{令 } x^2 - a^2 = u}{=} \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + C$$

$$\text{例 2. } \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} d(x^2 + a^2) \stackrel{\text{令 } \sqrt{x^2 + a^2} = t}{=} \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2 - a^2} dt^2$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2 - a^2} dt = \int \left[ 1 + \frac{a^2}{t^2 - a^2} \right] dt$$

$$= t + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a-t}{a+t} \right| + C = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 + x^2}}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} \right| + C$$

$$\text{例 3. } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} (x > 0) = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) + C$$

### 3. 分部积分法

使用分部积分法时被积函数中谁看作  $u(x)$  谁看作  $v'(x)$  有一定规律。

按照‘反、对、幂、三、指’的顺序，谁在前，谁作  $u(x)$

#### 典型例题

##### 一. 第一换元积分法

例 1. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx \quad (n > 1, \text{正整数}) \quad (2) \int \frac{2x+3}{x^2 + x + 1} dx$$

$$(3) \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$$

$$(4) \int \frac{6x^2-26x+26}{x^3-6x^2+11x-6} dx$$

解 (1) 原式 =  $\int \frac{1+x^n-x^n}{x(x^n+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}} dx$

$$= \ln|x| - \frac{1}{n} \ln|x^n+1| + C = \ln \left| \frac{x}{\sqrt[n]{x^n+1}} \right| + C$$

(2) 原式 =  $\int \frac{(2x+1)+2}{x^2+x+1} dx = \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$= \ln(x^2+x+1) + 2 \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \ln(x^2+x+1) + \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(3) 原式 =  $\int \frac{(2x-3)+4}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{d(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} + 4 \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

$$= \ln|x^2-3x+2| + 4 \int \left[ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right] dx = \ln|x^2-3x+2| + 4 \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

(4) 原式 =  $\int \frac{6x^2-26x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \left[ \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \right] dx$

$$6x^2-26x+26 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + (1x-1)(x-2)$$

令  $x=1$ ,  $6=2A$ ,  $A=3$ ;

令  $x=2$ ,  $-2=-B$ ,  $B=2$ ;

令  $x=3$ ,  $2=2C$ ,  $C=1$ 。

因此, 原式 =  $\int \left[ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right] dx = \ln|(x-1)^3(x-2)^2(x-3)| + C$

例 2. 求下列不定积分

(1)  $\int \cos^4 x dx$       (2)  $\int \cos^5 x dx$       (3)  $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(4)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$     (5)  $\int \sec^4 x dx$       (6)  $\int \tan^4 x dx$

例3. 求下列不定积分:

(1)  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$     (2)  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$     (3)  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$     (4)  $\int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

分析: 这四个题中均含有  $e^x$ , 而  $e^x dx = de^x$ , 因而可以用凑微分的方法积分.

例4. 求下列不定积分

(1)  $\int \frac{dx}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$     (2)  $\int (x \ln x)^{\frac{3}{2}} (\ln x + 1) dx$     (3)  $\int \frac{\sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 5}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

(4)  $\int \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2} dx$     (5)  $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x (1 + \cos x e^{\sin x})} dx$     (6)  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx$   
 ( $b^2 \neq a^2$  常数)

(

例5. 求下列不定积分

(1)  $\int \frac{\ln|\arcsin x|}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} dx$       (2)  $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$     (3)  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$

(4)  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$       (5)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$     (6)  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

解:      (6) 解一:  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{(\sin^2 x)^2 + (1 - \sin^2 x)^2}$

令  $\sin^2 x = u$   $\int \frac{du}{u^2 + (1-u)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \arctan \frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \arctan(2 \sin^2 x - 1) + C$$

$$= -\arctan(\cos 2x) + C$$

解二: 
$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d \cos 2x}{\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2}$$

$$= -\int \frac{d \cos 2x}{(\cos^2 2x + 1)} = -\arctan(\cos 2x) + C$$

例 6. 求下列不定积分

(1) 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

(2) 
$$\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx$$

(3) 
$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$$

(4) 
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

例 7. 求下列不定积分

(1) 
$$\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$$
 (2) 
$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b)$$

### 三. 第二换元积分法

例 1. 求 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

解: 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \stackrel{\text{令 } x=t^6}{=} \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt$$

$$= 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$$

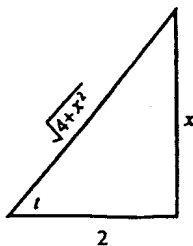
例 2. 求下列不定积分

(1)  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$  (2)  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0)$  (3)  $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (a > 0)$

(4)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$  (5)  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

解 (5) 解一:  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{x=2\tan t}{dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}} \int \frac{1}{4\tan^2 t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 t} dt$

$$= \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t} dt = -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C \quad (\text{这里已设 } x > 0)$$



解二: 倒代换

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} dx \quad \because \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

原式

$$= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} d\left(\frac{4}{x^2}+1\right) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{4}{x^2}+1} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C \quad (\because x > 0)$$

例 3. 求下列不定积分

(1)  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a > 0)$  (2)  $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx \quad (a > 0)$

(3)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (b > a)$  (4)  $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx \quad (b > a)$



解 (1) 解一: 令  $x = a \cos 2t$ , 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} (-2a \sin 2t) dt = -2a \int \frac{\cos t}{\sin t} \cdot 2 \sin t \cos t dt \\ &= -2a \int (1 + \cos 2t) dt = -a(2t + \sin 2t) + C \\ &= -a \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解二: } \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C \end{aligned}$$

(注:  $\arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\arcsin \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{a}$ )

#### 四. 分部积分法 (有时还用了换元积分法)

例 1. 求下列不定积分

$$\begin{aligned} (1) \int x e^{-x} dx \quad (2) \int x^2 e^{-2x} dx \quad (3) \int x^3 e^{-x^2} dx \\ (4) \int x \cos x dx \quad (5) \int x^2 \sin 2x dx \quad (6) \int (3x^2 + x - 1) \cos x dx \end{aligned}$$

例 2. 求下列不定积分

$$\begin{aligned} (1) \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1) \quad (2) \int \arcsin x dx \\ (3) \int \arctan x dx \quad (4) \int x \arctan x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1) } \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1) &= \frac{1}{n+1} \int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \\ &- \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 解一: } \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x d \arcsin x$$

$$\begin{aligned}
 &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

解二：令  $\arcsin x = t$ ，则  $x = \sin t$

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin x dx &= \int t d \sin t = t \sin t - \int \sin t dt \\
 &= t \sin t + \cos t + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int x d \arctan x \\
 &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\
 &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \\
 &- \frac{1}{2} \int x^2 d \arctan x = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left[ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{x}{2} \\
 &+ \frac{1}{2} \arctan x + C = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{x}{2} + C
 \end{aligned}$$

例 4. 求下列不定积分

$$(1) \int e^{ax} \sin bxdx \begin{pmatrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{pmatrix} \quad (2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx (a \neq 0) \quad (3) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx$$

### § 3. 2 定积分和广义积分的概念与计算方法

#### 一. 定积分的概念与性质

1. 定积分的定义
2. 定积分的几何意义

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，定积分  $\int_a^b f(x) dx$  在几何上表示曲线  $y = f(x)$  和直线

$x = a, x = b$  以及  $x$  轴围成各部分面积的代数和, 在  $x$  轴上方取正号, 在  $x$  轴下方取负号。

### 3. 定积分的性质 (10 条)

#### 二. 基本定理 (N-L 公式)

#### 三. 定积分的换元积分法和分部积分法

#### 四. 广义积分

##### 1. 无穷区间上的广义积分

常用公式

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} = \frac{1}{p-1}, & p > 1 \text{收敛,} \\ & p \leq 1 \text{发散,} \end{cases}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^p} \begin{cases} = \frac{1}{p-1}, & p > 1 \text{收敛,} \\ & p \leq 1 \text{发散.} \end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \begin{cases} \text{收敛} (\lambda > 0) \\ \text{发散} (\lambda \leq 0) \end{cases}, (k \geq 0)$$

##### 2. 无界函数的广义积分 (瑕积分)

(2) 常用公式:  $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$   $\begin{cases} \text{收敛} (q < 1 \text{时}) \\ \text{发散} (q \geq 1 \text{时}) \end{cases}$

类似地考虑  $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^q}$  和  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^q}$

最后指出: 由于广义积分是变限积分的极限, 因此原则上由定积分的运算法则和极限的运算法则就可以得到广义积分运算法则。

#### 典型例题

##### 用常规方法计算定积分

例 1. 计算下列定积分

(1)  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$

(2)  $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$

(3)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

(4)  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  (收敛的广义积分)

$$(5) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$$

$$(6) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (b > a) \quad (\text{收敛的广义积分})$$

解 (1)  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \int_0^{2\pi} x^2 d \sin x = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx$

$$= 2 \int_0^{2\pi} x d \cos x = 2x \cos x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx$$

$$= 4\pi - 2 \sin x \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$(2) \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx^2 = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) 令  $\sqrt{e^x-1} = t$ ,  $x = \ln(t^2+1)$ ,  $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$ ,  $x=0$  时  $t=0$ ;  $x=\ln 2$  时,

$t=1$

于是  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right] dt$

$$= 2 \left[ t - \arctan t \right]_0^1 = 2 \left( 1 - \frac{x}{4} \right)$$

(4) 令  $\arcsin \sqrt{x} = t$ ,  $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

于是  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$

$$(5) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} d\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(6) 令  $x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(b-a)\sin 2t}{(b-a)\cos t \sin t} dt = \pi$$

例 2. 计算下列定积分 (分段函数)

(1)  $\int_{-1}^1 |x^2 - 3x| dx$     (2)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$     (3)  $\int_{-2}^3 \min\{1, x^2\} dx$   
 (4)  $\int_{-2}^2 \max\{x, x^2\} dx$     (5)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$     (6)  $\int_0^1 x|x-a| dx$

### § 3. 3 定积分的应用

#### 一. 平面图形的面积

##### 1. 直角坐标系

模型 I  $S_1 = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx$  其中  $y_2(x) \geq y_1(x)$ ,  $x \in [a, b]$

模型 II  $S_2 = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy$  其中  $x_2(y) \geq x_1(y)$ ,  $y \in [c, d]$

注: 复杂图形分割为若干个小图形, 使其中每一个符合模型 I 或模型 II 加以计算, 然后再相加。

##### 2. 极坐标系

模型 I  $S_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$  模型 II  $S_2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta$

##### 3. 参数形式表出的曲线所围成的面积

设曲线  $C$  的参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ,  $(\alpha \leq t \leq \beta)$   $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\psi(\beta) = b$ ,  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$

(或  $[\beta, \alpha]$ ) 上有连续导数, 且  $\varphi'(t)$  不变号,  $\psi(t) \geq 0$  且连续, 则曲边梯形面积 (曲线  $C$  与直线  $x = a$ ,  $x = b$  和  $x$  轴所围成)

$$S = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

# 公共课知识家【政治】

## 【专题一】重要知识点深度解析

### 唯物史观精义

唯物史观是马克思一生最伟大的两个发现之一。恩格斯指出，正像达尔文发现有机界的发展规律一样，马克思发现了人类历史的发展规律。唯物史观的确立使关于人类社会历史的研究第一次建立在科学的基础之上。

#### 第一，关于人类社会的有机构成

古往今来阐释人类历史的著作可谓汗牛充栋，其中，有的还试图揭示社会发展规律。但最有意义的也不过是真实地记载了若干历史事实，收集了一些有价值的素材，却不可能揭示历史发展的规律。在他们的笔下某种政治制度建立在某个时代、某种思想理论出现于某种情境纯属偶然。可以在数百年甚至上千年之前，也可以在数百年甚至上千年之后，这样历史实际上就成了扑朔迷离的一团乱麻。其所以如此，是因为人们对于各种历史现象，往往只是用人的意向、观念和法律加以解释，而不去探究决定人的意向、观念和法律的物质力量。他们采取的方法往往是眉毛胡子一把抓，这样便看不到重复性和常规性，因而也难以从中发现规律性。

马克思的伟大创造在于，他从社会生活的各种领域中划分出经济领域，从一切社会关系中划分出生产关系。这样，就有可能看出重复性和常规性，从而发现历史发展的规律性。例如，一个资本主义国家和另一个资本主义国家尽管有很多不同之处，有时甚至千差万别，但在经济领域、在生产关系上却存在着共同之处：同样都由占有生产资料的资本家和除了劳动力外一无所有的雇佣工人组成，都存在着生产社会化和生产资料私人占有的矛盾，于是便可以得出同属资本主义社会形态的结论。一切社会形态，诸如原始、社会奴隶社会、封建社会、资本主义社会乃至社会主义——共产主义社会莫不如此。经济领域是社会生活各种领域的基础，生产关系是一切社会关系的基础，政治法律制度和社会意识形态都是建筑在这个基础上面的，都可以从这个基础中找到解释。这样，人类历史便成了有规律可循的客观的发展过程了。

#### 第二，关于生产力的最终决定作用

社会生产力包括物的要素和人的要素，生产资料是生产力中物的要素。先进程度不同的生产资料往往标志着生产力发展的不同水平以致会引起社会形态的嬗变。马克思在《哲学的贫困》中说，“手推磨产生的是封建主的社会，蒸汽磨产生的是工业资本家的社会”。但是，物的要素必须被人——劳动者——所掌握并进入生产过程才能成为生产力，没有劳动者，生产资料只不过是一堆死物，不能成为现实的生产力。

生产力是随着科学技术的发展而不断发展的，先进的科学技术一旦应用于生产实践，便会成为强大的活跃的社会生产力。但是，自然科学作为一种知识体系，在它未加入到生产过程以前也还不是物质的、直接的生产力，而是一种潜在的、可能的生产力。只有当它应用于生产过程，才会转化为直接的、现实的生产力。至于生产资料的改进，科学技术的发展，归根到底都是出自劳动者（包括体力劳动者和脑力劳动者）的生产实践和科学实验。总之，离开了劳动者，生产力在人类社会中的最终决定作用便无从谈起。

#### 第三，社会基本矛盾的运动

生产关系和生产力，上层建筑和经济基础，这是人类社会的基本矛盾。它们之间的矛盾运动，促使人类社会向前发展。一个社会的生产关系和生产力、经济基础和上层建筑，彼此不可能只有适应的一面而没有矛盾的一面。但是过去在很长时期内，人们对这个问题的认识却离开了辩证法

陷入了形而上学。

适应与不适应，这两个方面不可能平分秋色，不应该等量齐观。其中必有一个方面是主要的，另一个方面是次要的。拿过去的社会来说，在其上升的时期，适应的一面是主要的，不适应的一面是次要的；在其没落的时期情况则正好相反。社会主义社会的矛盾同旧社会的矛盾（例如同资本主义社会的矛盾）是根本不相同的。毛泽东指出，资本主义社会的矛盾表现为剧烈的对抗和冲突，表现为剧烈的阶级斗争，那种矛盾不可能由资本主义制度本身来解决，而只有社会主义革命才能够加以解决。社会主义社会的矛盾是另一回事，恰恰相反，它不是对抗性的矛盾，它可以经过社会主义制度本身，不断地得到解决。

毛泽东在《关于正确处理人民内部矛盾的问题》中进一步指出，在社会主义社会中，基本的矛盾仍然是生产关系和生产力之间的矛盾、上层建筑和经济基础之间的矛盾。既然社会主义社会中的生产关系和生产力之间、上层建筑和经济基础之间仍然存在着矛盾，那么在建立社会主义社会以后，决非一劳永逸，而是还要对不适应生产力发展的生产关系、不适应经济基础的上层建筑及时地进行改革，使之由不适应到适应。党的十一届三中全会以来，我们党在坚持四项基本原则的同时坚持改革开放，正是这个论断在新的时期的运用和发展。

**考点精练：**

单项选择题（下列题目只有一个正确选项）

1. 由于社会历史是有意识有目的活动着的人创造的，因此（ ）
  - A. 社会规律是由人所创造的
  - B. 人们可以改造或消灭社会规律
  - C. 社会发展规律只能通过人的自觉活动起作用
  - D. 人的活动都体现社会规律
2. 在人的自觉活动和社会发展规律的关系问题上，宿命论的错误在于（ ）
  - A. 否认人的自觉活动，夸大社会规律的必然性
  - B. 否认社会规律的必然性，夸大人的自觉活动
  - C. 否认人的自觉活动和社会发展规律的统一
  - D. 承认社会规律的必然性
3. 经济基础是指（ ）
  - A. 作为生产关系的总和的社会经济结构
  - B. 生产力和生产关系的统一
  - C. 生产资料所有制形式
  - D. 人们在生产过程中的经济地位
4. 在生产力与生产关系的矛盾运动中，生产关系是（ ）
  - A. 最活跃、最革命的因素
  - B. 相对稳定的因素。
  - C. 决定生产力性质的因素
  - D. 标志生产力发展水平的因素
5. “手推磨产生的是封建主为首的社会，蒸汽机产生的是工业资本家为首的社会”说明（ ）
  - A. 科学技术是第一生产力
  - B. 生产工具是生产力水平的重要尺度
  - C. 资本主义社会普遍采用大机器生产
  - D. 生产力状况决定生产关系的状况
6. 在社会生活中，上层建筑对于社会发展的性质取决于（ ）
  - A. 国家政权的阶级属性

- B. 它所服务的经济基础的性质
  - C. 社会意识形态的性质
  - D. 社会生产力的性质
7. 列宁说：“如果社会主义在经济上尚未成熟，任何起义也创造不出社会主义来”。这就是说（ ）
- A. 社会主义革命只能在经济发达的国家发生和取得胜利
  - B. 社会主义革命需要一定的物质前提
  - C. 只能靠经济力量去实现社会主义
  - D. 社会主义革命能够在资本主义内部自发产生
8. 我国社会主义初级阶段实行以公有制为主体、多种所有制经济共同发展的基本经济制度，促进了生产力的发展，说明实行这种制度遵循了（ ）
- A. 生产关系一定要适合生产力发展状况的原理
  - B. 经济基础决定上层建筑的原理
  - C. 生产力具有自我增值能力的原理
  - D. 社会经济制度决定生产力状况的原理
9. 一切历史冲突的根源在于（ ）
- A. 生产力和生产关系之间的矛盾
  - B. 剥削阶级和被剥削阶级之间的矛盾
  - C. 人民群众和各种敌对分子之间的矛盾
  - D. 人口众多和资源贫乏之间的矛盾
10. 在社会生活中，如果上层建筑对社会发展起到了促进作用，这表明（ ）
- A. 上层建筑与经济基础相符合
  - B. 上层建筑直接影响了生产力
  - C. 上层建筑是为先进的经济基础服务
  - D. 国家政权成为上层建筑的核心

参考答案：1, C;2, A;3, A;4, B;5, D;6, B;7, B;8, A;9, A;10, C

多项选择（至少有两项正确答案）

1. 政治上上层建筑是“思想的物质附属物”是指（ ）
- A. 政治上上层建筑是经济关系的反映
  - B. 政治上上层建筑中包括国家机器等实体因素
  - C. 政治上上层建筑是派生的、第二性的
  - D. 政治上上层建筑是通过人的意识形成的
2. 生产力和生产关系的关系是（ ）
- A. 生产力决定生产关系
  - B. 生产关系对生产力具有反作用
  - C. 生产关系要适合生产力的发展要求
  - D. 生产力是第一性的，生产关系是第二性的
3. 社会规律的特点是（ ）
- A. 从形成机制上，它形成于人的实践活动之中
  - B. 从作用方式上，它只有通过人的有目的有意识的活动才能体现出来
  - C. 从表现形式上，它主要表现为统计学规律
  - D. 从表现形式上，它主要表现为单线决定论



4. 马克思说：“无论哪一种社会形态，在它所能容纳的全部生产力发挥出来以前，是决不会灭亡的；而新的更高的生产关系，在它存在的物质条件在旧社会的胞胎里成熟以前，是决不会出现的。”这段话说明（ ）

- A. 生产力的发展是促使社会形态更替的最终原因
- B. 一种新的生产关系的产生需要客观的物质条件的成熟
- C. 无论哪一种社会形态，当它还能促进生产力发展时，是不会灭亡的
- D. 社会形态总是具体的，历史的

5. 经济基础和上层建筑的关系是（ ）

- A. 第一性和第二性的关系
- B. 经济基础决定上层建筑
- C. 上层建筑对经济基础具有反作用
- D. 上层建筑对整个社会反作用的性质取决于它所能服务的经济基础的性质

6. 判定某种上层建筑是进步的还是落后的，主要是看它（ ）

- A. 是否与它自己的经济基础相适应
- B. 能否推动生产力的发展
- C. 能否帮助适合生产力状况的生产关系的巩固和发展
- D. 是否能帮助它自己经济基础的形成和巩固

7. 生产力和生产关系、经济基础和上层建筑之间的矛盾是人类社会的基本矛盾。这是因为这两对矛盾（ ）

- A. 制约和决定其他一切社会矛盾
- B. 是推动社会发展的基本动力
- C. 构成了社会的基本结构
- D. 决定社会发展的客观趋势和方向

8. 社会发展的一般规律有（ ）

- A. 社会存在决定社会意识
- B. 生产关系适合生产力状况的规律
- C. 上层建筑适应经济基础变革要求的规律
- D. 地理环境决定社会发展的规律

参考答案

- 1, ABCD; 2, ABC; 3, ABC; 4, ABCD; 5, ABCD; 6, BC; 7, ABCD; 8, ABC;

## 【专题二】追古溯今练考点

### 材料一

1942年5月1日起5万余日伪军对冀中根据地进行空前野蛮的“大扫荡”，实行烧光、杀光、抢光的“三光”政策，企图一举摧毁根据地的生存条件。在定县北町村的地道里，日本用毒气毒死军民800多人。冀中区军民开展了极为艰苦的反“扫荡”斗争，粉碎了日本侵略军“确保华北、先保平原”的企图。在五六两个月，晋察冀军民消灭日、伪军1万余人。在太行区5月反“扫荡”、保卫八路军总部的战斗中，八路军副参谋长左权英勇牺牲。

#### 相关考点：

中国近现代史纲要，第六章，中华民族的抗日战争

中国共产党举起武装抗日的旗帜

#### 考点精练

单项选择题（下列题目只有一个正确选项）

- 抗战初期敌后游击战争的作用有（ ）
  - A, 配合了正面作战 B, 抗击了侵华日军的主力
  - C, 对日军后方构成战略威胁 D, 彻底粉碎了日军速战速决的计划
- 抗日战争时期敌后抗日根据地的土地政策的实质是（ ）
  - A, 克服经济困难的措施 B, 变革农村生产关系
  - C, 奠定抗战胜利的基础 D, 限制农村的封建剥削
- 以下各项政策中属于加强各阶层人民的团结，巩固抗日民族统一战线的政策的是（ ）
  - A, 减租减息 B, 精兵简政
  - C, 大生产运动 D, “三三制”原则
- 以下对1938年10月以前国民政府抗战的评价，正确的是（ ）
  - A, 消极避战导致大片国土丢失 B, 积极反共导致对日作战不力
  - C, 迟滞了日本军队的侵略进程 D, 努力奋战保住西部大片国土

参考答案：1, A, 2, D, 3, D, 4, C;

### 材料二

1937年5月2日至14日 中共中央在延安召开有苏区、白区和红军代表参加的党的全国代表会议

1937年5月2日至14日 中共中央在延安召开有苏区、白区和红军代表参加的党的全国代表会议（当时称苏区代表会议）。毛泽东作了《中国共产党在抗日时期的任务》的报告和《为争取千百万群众进入抗日民族统一战线而斗争》的结论，强调在统一战线中坚持无产阶级领导权的重要性。会议批准了遵义会议以来党的政治路线，为迎接全国抗日战争的到来作了重要准备。此后，中共中央还在延安召开了白区代表会议。刘少奇作了《关于白区的党和群众工作》的报告。会议总结了党在白区工作中的经验教训，批判了“左”倾关门主义的错误，阐述了党在白区工作的基

本方针和斗争策略。

**相关考点：**

中国近现代史纲要，第五章，中国革命的新道路

抗日民族统一战线的策略

单项选择题（下列题目只有一个正确选项）

- 1, 马克思主义普遍真理同中国革命具体实践相结合的光辉典范是指（ ）  
A, 中国工运第一次高潮 B, 革命统一战线建立  
C, 南昌起义 D, 毛泽东领导工农武装割据
- 2, 中共解决中国由新民主主义向社会主义革命转变的重大问题的会议是（ ）  
A, 中共“二大” B, 八七会议 C 中共七大 D, 七届二中全会

参考答案 1, D;2, D;

**材料三**

1942年5月2日 中共中央在延安杨家岭召开延安文艺工作者座谈会。毛泽东发表重要讲话指出，会议的目的是要和大家交换意见，研究文艺工作和一般革命工作的关系问题，求得革命文艺的正确发展，求得革命文艺对其他革命工作的更好协助，借以打倒我们民族的敌人，完成民族解放的任务。为此，必须解决文艺工作者的立场问题、态度问题、工作对象问题和学习问题。会议进行了热烈的讨论。23日，毛泽东在会议结论中，深刻阐明了革命文艺为人民大众服务的根本方向和文艺工作者深入工农兵、密切联系实际、学习马克思主义和改造世界观的重要性，回答了现代文艺运动中许多有争论的问题。毛泽东的讲话，不仅对文艺界的整风运动起了积极的推进作用，而且促进了广大党员干部学习辩证唯物主义和历史唯物主义、改造世界观的自觉性

**相关考点：**

中国近现代史纲要，第六章，中华民族的抗日战争

整风运动和实事求是思想路线在全党的确立

单项选择题（下列题目只有一个正确选项）

- 1, 主观主义的实质是理论脱离实际，它颠倒了认识和实践的关系，是实际工作中的唯心主义。延安整风运动中最主要的任务就是反对主观主义，主观主义的主要表现形式是  
A. 经验主义、宗派主义  
B. 教条主义、经验主义  
C. 教条主义、官僚主义  
D. 官僚主义、经验主义
- 2, 延安整风运动最主要的任务是（ ）  
A. 反对宗派主义  
B. 反对党八股  
C. 反对主观主义

D. 反对宗派主义

参考答案：1, B;2, C;

多项选择（至少有两项正确答案）

1, 1942年2月，毛泽东先后做了讲演，整风运动在全党范围普遍展开，演讲包括（ ）

- A. 《整顿党的作风》
- B. 《改造我们的学习》
- C. 《反对党八股》
- D. 《中国革命和中国共产党》

2, 中国共产党在20世纪40年代前期开展的整风运动，被认为是“深刻影响二十世纪中国历史进程的重大事件，也是建国后历次政治运动的滥觞”，这场整风运动（ ）

- A. 最主要的任务是反对宗派主义
- B. 是一场伟大的思想解放运动
- C. 确立了毛泽东思想为全党的指导思想
- D. 使马克思主义思想路线在全党范围内确立起来

参考答案：

1, AC;2, BD

**材料四**

1947年5月20日 五二〇血案

1947年5月20日 国民党当局对举行反饥饿、反内战游行的学生采取暴力手段，制造五二〇血案。由于国民党政府把大量教育经费挪用于内战，使得国民党统治区的教育危机日趋严重。1947年四五月间，上海、南京等许多城市的学生发出“抢救教育危机”、“向炮口要饭吃的呼声”；5月4日，上海学生走上街头进行反内战宣传，遭到殴打、逮捕；5月15日，南京中央大学等校学生3000人到国民党行政院和教育部请愿，未能得到满意答复，于是决定5月20日举行大规模游行；5月18日，北京大学、清华大学等校学生也纷纷上街进行反饥饿、反内战宣传。华北学生还成立了反饥饿反内战联合会，斗争声势日渐扩大。5月20日，京、沪、苏、杭16所专科以上学校5000余名学生在南京中央大学会合后，举行“挽救教育危机联合大游行”。游行队伍在珠江路口遭到水龙喷射和棍棒、皮鞭殴打，重伤19人，轻伤90余人，被捕20余人，这就是五二〇血案。在中国共产党正确方针的指引下，以五二〇运动为高潮，反饥饿、反内战、反迫害运动扩大到国民党区60多个大中城市，形成了人民大革命的第二条战线。人民解放军的作战和国民党统治区人民的斗争这两条战线上的胜利，使蒋介石政府处于全民的包围之中。

**相关考点：**

中国近现代史纲要

第七章，为新中国而奋斗

第二条战线的形成

多项选择（至少有两项正确答案）

解放战争后，国民党统治区的人民民主运动迅速发展起来，毛泽东曾说，“现在又出现了第二条战线，就是伟大正义的学生运动和蒋介石政府之间的尖锐斗争。”毛泽东所说的“伟大正义的学生运动”主要有（ ）

- A. 二二八起义
- B. 抢米风潮
- C. 一二三〇运动
- D. 五二〇运动

参考答案

CD;

# 公共课知识家【英语】

---

## (一) 教育与婚姻

There is a widening gulf between how the best- and least-educated Americans approach marriage and child-rearing. Among the elite (excluding film stars), the nuclear family is holding up quite well. Only 4% of the children of mothers with college degrees are born out of marriage. And the divorce rate among college-educated women has dropped. Of those who first tied the knot between 1975 and 1979, 29% were divorced within ten years. Among those who first married between 1990 and 1994, only 16.5% were.

At the bottom of the education scale, the picture is reversed. Among high-school dropouts, the divorce rate rose from 38% for those who first married in 1975-79 to 46% for those who first married in 1990-94. Among those with a high school diploma but no college, it rose from 35% to 38%. And these figures are only part of the story. Many mothers avoid divorce by never marrying in the first place. The out-of-wedlock birth rate among women who drop out of high school is 15%.

The “marriage gap” is one of the chief sources of the country’s notorious and widening inequality. Middle-class kids growing up with two biological parents are “socialized for success”. They do better in school, get better jobs and go on to create families of their own. Children of single parents or broken families do worse in school, get worse jobs and go on to have children out of wedlock. This makes it more likely that those born near the top or the bottom will stay where they started.

A large majority—92%—of children whose families make more than \$75,000 a year live with two parents (including step-parents). At the bottom of the income scale—families earning less than \$15,000—only 20% of children live with two parents. One might imagine that this gap arises simply because two breadwinners earn more than one. A single mother would have to be unusually talented and diligent to make as much as \$75,000 while also raising children on her own. And it is impossible in America for two full-time, year-round workers to earn less than \$15,000 between them.

But there is more to it than this. Marriage itself is a wealth-generating institution. Those who marry “till death do us part” end up, on average, four times richer than those who never marry. This is partly because marriage provides economies of scale—two can live more cheaply than one—and because the kind of people who make more money—those who work hard, plan for the future and have good interpersonal skills—are more likely to marry and stay married. But it is also because marriage affects the way people behave.

American men, once married, tend to take their responsibilities seriously. Married men drink less, take fewer drugs and work harder, earning between 10% and 40% more than single men with similar schooling and job histories. And marriage encourages both spouses to save and invest more for the future. Each partner provides the other with a form of insurance against falling sick or losing a job. Marriage also encourages the division of labor. As Adam Smith observed two centuries ago, when you specialize, you get better at what you do, and you produce more.

注：本文选自 Economist, 05/24/2007

1. Which of the following did NOT happen during 1975-1994?
  - [A] Less people who received high education got divorced.
  - [B] More high school dropouts failed their first marriage.
  - [C] Many women did not marry because of their reluctance of children-rearing.
  - [D] The divorce rate of high school graduates increased.
  
2. We can learn from the text that middle-class children tend to have the following characteristics EXCEPT\_\_\_\_\_.
  - [A] good appearances
  - [B] high school grades
  - [C] well-paid jobs
  - [D] happy family
  
3. The behavior of married people is probably more\_\_\_\_\_.
  - [A] negative
  - [B] positive
  - [C] active
  - [D] people' s behavior won' t be influenced by marriage.
  
4. A single mother, according to the text, probably \_\_\_\_\_.
  - [A] has an easy and simple life
  - [B] finds herself busy with both work and child.



[C] is very smart and does well in her job.

[D] can save more money than when she' s in a marriage.

5. What we can learn about American people' s opinions towards marriage?

[A] Movie stars tend to remain in stable and happy marriage.

[B] More women want to have child out of wedlock.

[C] People' s views of marriages are greatly influenced by their parents.

[D] People marry because specialization helps produce more.

### 篇章剖析

本文主要讲述了不同教育程度的当代美国人对于婚姻和育子截然不同的态度。第一段说明在接受过较好教育的人离婚率在降低，第二段随即指出教育程度较低的人们离婚率正在攀升。第三段进一步阐述了这种不平等的现象。后三段则从收入、态度、婚姻机制等不同的层面分析了这种差距产生的原因。

### 词汇注释

gulf n. 深渊, 隔阂

approach n. 方法, 步骤, 途径

child-rear n. 抚养孩子

rear vt. 培养, 饲养

elite n. 精英, 精华

tie the knot [俚]结婚

reverse vt. 颠倒, 倒转

dropout n. 退学学生, 辍学学生

diploma n. 文凭, 毕业证书

wedlock n. 结婚生活, 婚姻

notorious adj. 臭名昭著的

diligent adj. 勤勉的, 用功的

economy of scale 规模经济

make money 赚钱

spouse n. 配偶

division n. 划分, 分开

specialize v. 专攻

难句突破

1. Of those who first tied the knot between 1975 and 1979, 29% were divorced within ten years. Among those who first married between 1990 and 1994, only 16.5% were.

主体句式 Of those..., 29% were divorced within ten years. Among those ..., only 16.5% were.

结构分析: 这是两个简单句。第一句中, those 后面是 who 引导的定语从句。第二句中, those 后面是 who 引导的定语从句, 主句中省略了 divorced within ten years, 这个句子中有省略现象。

补充完整应该是 only 16.5% were divorced within ten years.

句子译文: 在 1975 至 1979 年间结婚的人们中, 29% 的夫妇在十年内离婚。而 1990 年至 1994 年间结婚的人们中, 只有 16.5% 在十年内离婚。

2. Among high-school dropouts, the divorce rate rose from 38% for those who first married

in 1975-79 to 46% for those who first married in 1990-94.

主体句式 the divorce rate rose from 38% for those ...to 46% for those...

结构分析：该句子有两个定语从句，第一个是第一个 those 后面的 who 引导的定语从句，从 who 开始到 -79 结束，第二个定语从句是第二个 those 后面的 who 引导的定语从句，从 who 开始到句末结束。

句子译文：1975-79 年间第一次结婚的高中辍学者的离婚率为 38%，这个数字在那些于 1990-94 年间结婚的高中辍学者中则上升到了 46%。

3. Middle-class kids growing up with two biological parents are “socialized for success” .

主体句式 Middle-class kids are “socialized for success” .

结构分析：该句子中出现了分词作后置定语的语法现象。growing up with two biological parents 作 middle-class kids 的后置定语。

句子译文：对于中产阶级的孩子们来说，他们的自然父母都是“为了成功而在社会中奋斗”。

4. This makes it more likely that those born near the top or the bottom will stay where they started.

主体句式 This makes it more likely

结构分析：句子中 it 是形式宾语，真正的宾语是 that 引导的宾语从句，从 that 开始到句末结束。

That 宾语从句中的主干是 those will stay where they started。born near the top or the bottom 分词短语作后置定语修饰 those。

句子译文：这看起来好像是，如果一个人出生在某个阶层，那么他这辈子都会呆在这个阶层。

5. A single mother would have to be unusually talented and diligent to make as much as \$75,000 while also raising children on her own.

主体句式 A single mother would have to be unusually talented and diligent to ...

结构分析：句子中有 as...as...同级比较，表示与...一样。While 后面的分词短语作状语，raise 的主语与句子主语一致，并且是主动关系，所以用到 V-ing 形式作状语。

句子译文：一个单身母亲只有特别有才能而且特别勤奋才能够赚到 7 万 5 千美元，同时她还得带孩子。

6. This is partly because marriage provides economies of scale—two can live more cheaply than one—and because the kind of people who make more money—those who work hard, plan for the future and have good interpersonal skills—are more likely to marry and stay married.

主体句式 This is partly because ... and because ...

结构分析：这个句子主要由两个部分组成，在“and because”之前是一部分，说明了第一个原因，其中两个破折号之间的部分是用来解释什么是“economies of scale”。“and because”之后说明了第二个原因，其主句为“the kind of people are more likely to marry and stay married”，其中两个破折号之间的内容是用来进一步说明前面提到的那一类人。

句子译文：一方面这是因为婚姻可以产生规模经济效益—两个人生活比一个人生活更加节约—另一方面那些能赚更多钱的人—那些辛勤工作、计划未来而且拥有很好交际能力的人—更可能结婚并一直保持婚姻。

参考答案:

1. C. 细节题。文章中第二段中提到“许多母亲们根本就不结婚以避免离婚”，因此妇女们不结婚的理由不是抚育孩子的问题。
2. A. 细节题。文章中第三段中提到中产阶级的孩子在学校表现更好，能找到更好的工作，并像父母那样组成自己的家庭。文中并没有提到他们的外表和形象。
3. B. 细节题。文章第五段中提到结婚会影响人们的行为，第六段进一步举例说明婚后男人们更负责、工作更勤奋等，说明结婚会使人们的行为变得更加正面。
4. B. 细节题。文章第四段中提到如果单身母亲要赚到很多钱的话，不仅要勤奋工作、还要带孩子，自然是非常忙碌辛苦。
5. C. 细节题。文章第三段说明孩子们很可能重复父母的生活轨迹，显然人们的婚姻观在很大程度上受到了父母的影响。

参考译文:

在美国，现在那些受过最好教育和最差教育的人们对于婚姻和抚育后代的看法差异越来越大。在社会精英中（除了影星以外），许多核心家庭都过得非常安稳幸福。在大学毕业的妇女中，只有4%是未婚生子。接受过大学教育的妇女离婚率正在降低。在1975至1979年间结婚的人们中，29%的夫妇在十年内离婚。而1990年至1994年间结婚的人们中，只有16.5%在十年内离婚。

在教育程度最低的人群中，情况却是相反的。1975-79年间第一次结婚的高中辍学者的离婚率为38%，这个数字在那些于1990-94年间结婚的高中辍学者中则上升到了46%。对于高中毕业但没有上大学的人们来说，这一数字从35%上升到了38%。这些数据仅仅是事情的一部分。许多母亲们根本就不结婚以避免离婚。高中辍学妇女婚外育子的比率达到15%。

这个国家的不平等状况一直是臭名昭著的，而且还在恶化，其中“婚姻差距”是产生不平等的主要原因之一。对于中产阶级的孩子们来说，他们的自然父母都是“为了成功而在社会中奋斗”。这些孩子们在学校的成绩相对都比较好，也能找到不错的工作，接着也组成他们自己的家庭。单亲和父母离异的孩子们在学校的表现则不尽人意，工作也不那么好，而且他们自己的孩子也可能婚姻不幸。这看起来好像是，如果一个人出生在某个阶层，那么他这辈子都会呆在这个阶层。大部分家庭收入超过7万5千美元的孩子（92%）与父母生活在一起（包括继父母）。而在收入最少的家庭中—收入少于1万5千美元—只有20%的孩子和父母生活在一起。我们可以认为这种差距的原因很简单，就是两个人赚工资总是比一个人赚得多。一个单身母亲只有特别有才能而且特别勤奋才能够赚到7万5千美元，同时她还带带孩子。而在美国，两个整年全职工作的人不可能只赚1万5千美元。

不仅如此，婚姻本身就是一种产生财富的机制。那些结婚后“直到死亡才能分开她们”的人们平均比从来没有结过婚的人富裕四倍。一方面这是因为婚姻可以产生规模经济效应—两个人生活比一个人生活更加节约—另一方面那些能赚更多钱的人—那些辛勤工作、计划未来而且拥有很好交际能力的人—更可能结婚并一直保持婚姻。同时这也是因为婚姻能够影响人们的行为。

美国的男人们一旦结婚以后，就会变得更加负责任。已婚男人通常更少喝酒，更少吸毒，工作更加勤奋，因此比有着相似教育和工作背景的单身男子赚的钱多10%至40%。婚姻能够鼓励夫妻双方都为未来进行节约和投资。每个人都能够为对方提供生病和失业保障。婚姻也能鼓励劳动分工。

正如亚当·斯密在两个世纪前所观察到的那样，专业化分工使得人们工作更出色，产出更多。

## (二) 科学发展专题

Past performance is not an indicator of future returns. That, at least, is the advice given to investors. But can the likelihood of a person committing a crime be predicted by looking at his record? The answer, according to a team of clinical forensic psychologists, is that it cannot. Not only is risk prediction unreliable but, when applied to individuals rather than groups, the margins of error are so high as to render any result meaningless.

Making assumptions about individuals from group data is generally only reasonably safe when the variation within the group is small. Despite this, risk assessments are routinely used to help decide who should be locked up, who should undergo therapy and who should go free. Risk prediction is also set to be used to assess the threat posed by people ranging from terrorist suspects to potential delinquents.

Stephen Hart, of Simon Fraser University in British Columbia, Canada, and colleagues decided to determine how accurate the tests of risk assessment are when applied to individuals rather than groups. Typically the tests work by assigning a score to people depending on factors such as their age, the history of their relationships, their criminal past and the type of victims they have chosen. If someone's score places him in a group in which a known proportion has gone on to commit a crime on release from detention, then the risk that person will prove a recidivist is thought to be similar to the risk for the group as a whole.

The paper published by Dr Hart and his colleagues in last month's issue of the British Journal of Psychiatry focused on two popular tests that follow this logic. The first was a 12-item test designed to assess risk for general violence over periods of seven to ten years. The second was a ten-item test designed to assess risk for violence and sexual violence over periods of five to 15 years. The researchers have also assessed other tests used for predicting sexual offences and domestic violence.

They found that variations between members of the groups were very large. In one of the tests, for example, the standard estimate of the chances of members of the group sexually reoffending was put at 36% within 15 years. They calculated that the actual range was between 30% and 43% of the group, with a 95% confidence level. But calculating the average probability for a group is much easier than calculating the same probability for any individual. Thus, using standard methods to move from group inferences to individual ones, they calculated that the chance of any one person reoffending was in the range of 3% to 91%, similarly with a 95% confidence level. Clearly, the seemingly precise initial figure is misleading.。

The principle is not peculiar to psychology. It has been recognised by statisticians for decades. They call it the ecological fallacy (although this term captures broader subtleties, too). Medicine has also been confounded by statistically based procedures. Indeed, the technique is only really useful when the successes and failures are aggregated. A life-insurance company, for instance, could wrongly predict the life span of every person



it insured but still get the correct result for the group.

注：本文选自 Economist, 06/02/2007

1. What do the clinical forensic psychologists think of risk prediction?

- [A] Risk prediction fails in the stock market.
- [B] Risk prediction is always effective when being applied to groups.
- [C] Risk prediction is not dependable when it comes to individual behavior.
- [D] Risk prediction should be widely used in all fields.

2. We can learn from the text that tests of risk assessment are \_\_\_\_\_.

- [A] longitudinal
- [B] very tricky
- [C] convincing enough
- [D] unreasonable

3. Traditional view and that of Dr. Hart on risk assessment are \_\_\_\_\_.

- [A] identical
- [B] similar
- [C] complementary
- [D] opposite

4. According to Dr. Hart, using standard methods to predict individuals \_\_\_\_\_.

- [A] is as easy as using them for groups
- [B] yields ineffective statistics

[C] can help attain precise results

[D] might be influenced by confidence level

5. Which of the following statements is TRUE?

[A] Ecological fallacy is a psychological phenomenon.

[B] Statisticians have been dealing with ecological fallacy for a long time and have almost succeeded in figuring out a solution.

[C] The statistics from a life insurance company on the longevity of a group of people should be reliable.

[D] Risk prediction is proved to be of zero practical value.

篇章剖析:

本文主要就如何科学进行犯罪预测展开论述。第一段首先提出了风险预测能够有效预测犯罪动机的问题;第二段对风险预测做出了简要说明,指出其局限性,且这种方法有些被滥用;第三、四段主要介绍了哈特博士针对以上问题进行的实验;第五段介绍了实验结果,说明了风险预测针对集体的有效性远远超过了针对个人的情况;第六段则进一步对风险预测进行阐发性论述,提出了生态学谬论的概念。

词汇注释:

margin n. 页边的空白, 差数

confidence level 置信度

assessment n. 评估, 估价

probability n. 概率

routine adj. 例行的; 常规的

inference n. 推论

therapy n. 治疗

initial adj. 最初的, 初始的

delinquent n. 失职者, 违法者

fallacy n. 谬误, 谬论

proportion n. 比例, 均衡

confound vt. 使混淆, 挫败

detention n. 拘留, 禁闭

aggregate v. 聚集, 合计

psychiatry n. 精神病学, 精神病治疗法

insure vt. 给...保险

domestic adj. 家庭的, 国内的

难句突破

1. Not only is risk prediction unreliable but, when applied to individuals rather than groups, the margins of error are so high as to render any result meaningless.

主体句式: Not only is risk prediction unreliable but the margins of error are high

结构分析: 本句子是个倒装句式并且是由 not only...but...连接的两个并列句。Not only 置句首句子要倒装。when applied to individuals rather than groups 是分词作状语。

句子译文: 风险预测不仅站不住脚, 而且即使是只用于个体而不是群体, 其误差之大也导致结果

失去意义。

2. Despite this, risk assessments are routinely used to help decide who should be locked up, who should undergo therapy and who should go free.

主体句式: risk assessments are used to help decide who..., who... and who...

结构分析: 本句子主句是一个简单的被动语态。to help decide who..., who... and who... 是句子的状语部分, 其中包含了三个 who 引导的宾语从句。

句子译文: 人们还是例行公事地用风险评估来帮助决定谁应该坐牢、谁应该接受治疗以及谁可获得自由。

3. If someone's score places him in a group in which a known proportion has gone on to commit a crime on release from detention, then the risk that person will prove a recidivist is thought to be similar to the risk for the group as a whole.

主体句式: If someone's score places him in a group, then the risk is thought to be similar to...

结构分析: 这个句子分为逗号前后的两个部分, 其中的每一个部分包含一个定语从句。前半句中, in which 引导的定语从句修饰 group; 而后半句中, that person will prove a recidivist 作为定语从句修饰 risk。

句子译文: 如果一个人的分数属于出狱后犯罪率很高的一组, 那么此人是惯犯的几率就大体上和这组的整体几率相同。

4. Thus, using standard methods to move from group inferences to individual ones, they calculated that the chance of any one person reoffending was in the range of 3% to 91%,

similarly with a 95% confidence level.

主体句式: they calculated that the chance was in the range of 3% to 91%.

结构分析: using...这部分是分词作状语, 与句子主语一致, 且是主动关系, 所以用了 V-ing 作状语, 主语中包含了 that 引导的宾语从句。

句子译文: 因此, 如果将群体的标准方法用于个体, 他们计算出一个人是惯犯的几率在同样 95% 的置信度下为 3%—91%。

题目分析:

1. C. 细节题。定位到文章第一段的第四, 五句, 风险预测对于个人行为的预测能力错误率极大, 几乎完全不可靠。
2. A. 细节题。文章第四段中举了两个测试的例子, 这两个测试都是长达多年的跟踪性试验。
3. D. 细节题。文章第二段中指出, 传统上人们习惯用风险评估来对个人的行为作出判断, 而哈特博士的实验结果则表明这种预测起到很大的误导作用, 可见双方的意见是相反的。
4. B. 细节题。根据文章第五段, 如果将群体的标准方法用于个体, 最终得到的结果是具有误导性的。
5. C. 细节题。C 选项的信息来自文章第六段的最后一句话, A life-insurance company, for instance, could wrongly predict the life span of every person it insured but still get the correct result for the group. 即“例如一个人寿保险公司也许不能预测每个人的寿命长度, 但它可以对群体做出准确预测。”。

参考译文

过去的付出并不代表未来的收获, 这至少可以给投资者一些启示。但一个人的犯罪动机能通过他过去的记录来预测吗? 一个临床法医心理学家小组的回答是否定的。风险预测不仅站不住脚, 而且即使是只用于个体而不是群体, 其误差之大也导致结果失去意义。

只有当一组数据内部变化程度相对较小时, 据此做出的对个体的判断才会比较可靠。尽管如此, 人们还是例行公事地用风险评估来帮助决定谁应该坐牢、谁应该接受治疗以及谁可获得自由。风险预测同样用于区分评估从来自嫌疑恐怖分子到潜在罪犯的各种威胁恐吓。

加拿大不列颠哥伦比亚省西蒙弗雷泽大学的斯蒂芬·哈特和他的同事决意要找出当这些测试用于个体而非群体时, 其准确性到底有多大。这些测试先根据个人年龄、社交经历、犯罪史、以及所

选择的受害者类型等因素给人们算出一个分数。如果一个人的分数属于出狱后犯罪率很高的一组，那么此人是惯犯的几率就大体上和这组的整体几率相同。

哈特博士和他的同事在上月的《英国精神病学杂志》上发表了一篇文章，主要介绍了按照这一逻辑进行的两个有名实验。第一个实验包括 12 项内容的测试，用来评估 7 至 10 年间的普通暴力风险；第二个实验包括 10 项相关内容的测试，用来评估 5—15 年间的暴力和性暴力风险。研究人员也评估了用来评估性侵犯和家庭暴力的其他一些实验。

他们发现每组成员间的差别很大。比如在其中一项测试中，15 年内再次进行性侵犯可能性标准估计是 36% 在 95% 的置信度下，他们得到的实际范围在 30% 和 43% 之间。但计算群体的平均概率要比计算个体的概率容易得多。因此，如果将群体的标准方法用于个体，他们计算出一个人是惯犯的几率在同样 95% 的置信度下为 3%—91%。很明显，看似准确的原始数据却起到了误导的作用。

这个原理不仅仅用于心理学，也已统计学承认达数十年之久。他们称其为生态学谬论（尽管这个术语还有更广泛和精细的意义）。医学也被基于统计学的程序弄的一团糟。实际上，这个技术只有在成功和失败都综合起来的时候才真正有用。例如一个人寿保险公司也许不能预测每个人的寿命长度，但它可以对群体做出准确预测。